36

CAVTIONEM IN QVANTITATVM INFINITE PARVARVM NEGLECTV OBSERVANDAM

EXEMPLIS QVIBVSDAM ILLVSTRAT

SIMVLQVE

AD AVDIENDAM VIIII. CAL. DEC. H. L. Q. C.

ORATIONEM

QVA

MVNVS PROFESSORIS MATHESEOS PVBLICI EXTRAORDINARII

ADIBIT

ACADEMIAE RECTOREM MAGNIFICVM

ILLVSTRISSIMOS COMITES

PATRESQVE AC CIVES

INVITAT

ABRAHAM GOTTHELF KAESTNER LIPS.
FAC. PHIL. ADSESS. IVR. CAND.

LIPSIAE

EX OFFICINA LANGENHEMIA.

EX QVO methodi illae inualuerunt, quibus infinitum computi legibus ſubiectum eſt, negligi quantitates prae reliquis euaneſcentes, durior res, minusque geometrica compluribus viſa eſt. Ipſe LEIBNITIVS

Quo duce in immenſi penetrauimus intima veri

ita loquutus eſt, vt infinite paruum magnumque, non niſi mentis fictiones habere viſus fuerit,*) cui illuſtris eius ſucceſſor calculum addit.**) Alii contra, non paſſuri, vt meris fictionibus praeſtantiſſima ſuperioris noſtrique ſaeculi inuenta nitantur, id omni adhibita opera egerunt, vt reale quid eſſe, infinitum, propriaque gaudere natura, cum omnibus quae inde conſequuntur, euincerent, quo potiſſimum ſpectat illuſtris FONTENELLII labor.***) LEIBNITIVS toleranter vera effata de infinito vocauit, hoc eſt: quae veris in calculo ſubſtitui poſſint. Id oſtendere iuſto opere adgreſſus eſt ſummus Scotorum mathematicus COLIN MAC LAVRIN****) more antiquorum nullisque adhibitis infiniteſimis, theoremata fundamentalia calculi infinitorum oſtendens.

NON MEVM eſt tantas componere lites, ſi FONTENELLIVM audimus*****) inde oriundas, quod Geometria, ea ex parte qua infinitum ſpectat, ad phyſicam, ad naturam intimam corporum, parum

 rum

*) Eſſais de Theod. Diſc. prel. art. 70. Act. Er. 1712. Apr. p. 167. FONTENELLE Eloge de M. LEIBNIZ.

**) Ont. Lat. §. 796. ſeqq.

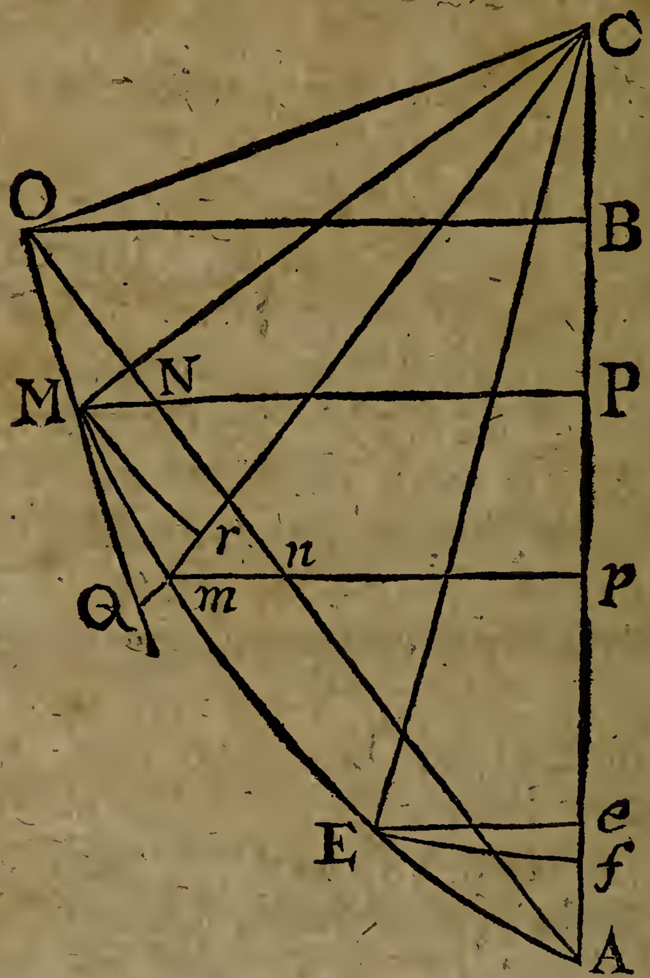
***) Elemens de la Geom. de l' infini.

****) A Treatiſe of Fluxions in two Books Edinb. 1742. 4°.

*****) El. de la Geom. de l' inf. pref.

rum nobis notam, aut ad ſublimiorem aliquam, cuiusque non niſi ſcintillulas quasdam percipere nobis datum ſit metaphyſicam, pertineat. Sumo id, de quo inter omnes conuenit, licere quantitates quasdam in calculo vt euaneſcentes conſiderare, penitusque negligere. Cuius adſerti rationem, ſi plures diuerſo modo reddunt, de re ipſa, non magis inter illos diſſentitur, quam de commercio corporis et animae, inter eos, qui egregie illud explicatum exiſtimant, *influxus phyſici* aut *harmoniae praeſtabilitae* vocibus prolatis.

NEQVE tamen impune ſemper quantitates infinite exiguas negligi, ipſa illarum attentior conſideratio euincit. Eam rem exemplis quibusdam illuſtrare animus eſt, quae vel propria ſua dignitate ſe commendent, vel huic negotio explicando inprimis idonea ſint.



I. SIT $OMmA$ circulus centri C, cuius elementum OM productum ſit in Q, quaeratur angulus QMm cum elemento proximo Mm contentus. Si ſumatur quod vulgo fit, CMQ = Rect. = mMC nil aliud obtinebitur, quam QMm euaneſcere. Hincque efficeretur, quod contendit PELETARIVS *) plurium circulorum, datam poſitione rectam, in vno eodemque puncto tangentium, contactus omnes aequales eſſe. At ex natura circuli, poſitis OM, Mm, lineis rectis, eſt

*) CLAV. EVCL. *Schol. poſt 16. Tert.*

eſt $COM = CMO = R - \frac{1}{2} OCM$ et $CMm = CmM = R - \frac{1}{2} MCm$ Quare $QMm = QMC - mMC = MOC + OCM - (R - \frac{1}{2} MCm) = \frac{1}{2} OCM + \frac{1}{2} MCm$. Vt angulus curuaturae medius arithmeticus ſit, inter angulos duos, elementis quarum curuaturam metitur, ad centrum reſpondentibus. Quae ſi aequalia ſint, eſt aequalis angulo ad centrum alterutri reſpondenti.

II. IN eodem circulo ſit Ae abſciſſa infinite parua, quaeratur eius quantitas expreſſa per ordinatam eE. Ex nat. circuli ſi radius $= a$ eſt $2a.\ Ae - Ae$ quadr. $= Ee$ quadr. Et hic ob quadratum infiniteſimae prae radice ſua euaneſcens, eſt $2a.\ Ae = Ee$ quad. ſeu $Ae = Ee$ quad. : $2a$.

SI poneretur $CEA = R$ eſſet ex natura triang. rectang. $eA = Ee$ quadr. : eC hoc eſt ob $eC = a - Ae = a$, $eA = Ee$ quadr. : a. Scilicet, poni oportet $CEA = R - \frac{1}{2} ECA$ hinc quia eſt $eEC = R - ECA$, fit $eEA = \frac{1}{2} ECA =$ angulo ad peripheriam arcui EA inſiſtenti. Producta ergo CA donec circulo denuo occurrens fiat diameter, et iuncto puncto occurſus cum E, continebit hoc punctum cum E, e, punctis, triangulum ipſi EeA ſimile eritque $2a - Ae : eE = eE : Ae$ vnde habetur ipſius Ae valor ante repertus.

III. FIERI poteſt, vt quantitates quarum reſpectu aliae euaneſcunt, ſe ipſas deſtruant, id quod angulis rectis in exemplis quae adduxi accidit. Quo caſu minus recte quantitates infinitae paruae prae reliquis negligerentur, cum euaneſcant prae ſingulis finitarum quantitatum, ſed non prae complexu ipſarum, in quo finitae ſe mutuo tollunt. Sic in art. II. euaneſcit ECA prae ſingulis CEA, CEe angulis, ſed non prae earum differentia eEA.

IIII. EADEM ratio in finitis obtinet, ſi cum infinite magnis comparentur. Quaeratur $(a + x)^{1-n} - a^{1-n}$ pro $a = \infty$. *) Id fieri videtur $= o$, ſed videtur tantum. Expandendo enim partem primam in ſeriem, fit ea $a^{1-n} + (1-n)\, x : a^{n}$ cet. Huius ſeriei ſequentes termini, ſi n ſit poſitiuus et $a = \infty$ prae expoſitis euaneſcunt, expoſitorum vero primus deſtruitur, a totius quantitatis cuius valor quaeritur parte ſecunda, vt pro hoc valore reſiduus ſit ſolus ſeriei terminus ſecundus. Generatim, duarum quantitatum infinitarum differentia non ponenda eſt $= o$ licet infinita ipſa aequalia ſint, cum ſalua aequalitate, finito quouis differre poſſint. Sic, quod oſtendit

*) IO. BERN. Op. T. IIII. n. CLXXIII. p. 238.

dit IO. BERNOVLLI*) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ cet. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ cet. inde non ſequitur vt ſit $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ cet. $= 0$ cum vtraque ſeries expoſitarum infinita ſit. Regulam igitur hanc obſeruari decebit: Inueſtigetur quantitatum differentia ſic vt tanquam finitae conſiderentur. In differentia ſic inuenta, conditio infinitum efficiens introducatur, habebiturque infinitorum differentia, quam alio modo reperire non licuiſſet. Sic $(a + x)^{1-n} - a^{1-n} = (1 - n)\, x : a^n$ cet. pro quocunque ipſius a valore, factoque a infinito ſequentes termini omnes euaneſcunt, vt expoſitus totum abſoluat. Huc etiam pertinet in vulgus mathematicorum nota methodus, aſymptotos curuarum definiendi, vbi differentia abſciſſae et ſubtangentis primum pro quantitate vtriusque finita quaeruntur, dein ambae infinitae ponuntur.

V. CVRVAE AEQVILIBRATIONIS ab HOSPITALIO et IO. BERNOVLLI**) conſideratae, aequatio eſt $yy = -xx - 2bx + 2aa \pm 2a\sqrt{(aa - 2bx)}$. Poſito $x = 0$ fit $yy = + 2aa \pm 2aa$ vt videatur ſemper dari valor aliquis $y = 0$ ad $x = 0$. Oſtenderunt tamen inuentores, nullum eſſe occurſum curuae cum axe ad $x = 0$ ſi $b < a$. Haec ſequenti modo conciliantur: $\sqrt{(aa - bx)} = a - bx : a - bbxx : 2a^3 - b^3x^3 : 2a^5$ cet. Vnde adhibendo ſignum inferius, quod dare videtur $y = 0$, prodit $yy = -xx - 2bx + 2aa - 2aa + 2bx + bbxx : aa + b^3x^3 : a^4$ cet. Seu $yy = bbxx : aa - xx + b^3x^3 : a^4$ cet. quem valorem, ſi x ſit elementaris, patet dare $y = x\sqrt{(bb - aa)} : a$ impoſſibile ſi $b < a$. Quae impoſſibilitas non animaduertitur, neglectis ſtatim in aequatione omnibus quae ab x pendent, cum hic eadem valeant quae dicta ſunt art. III.

VI. SIT $y = (\frac{1}{2}e \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ee + fx + cx^2 + bx^3 + ax^4)}) : x$ et quaeratur y pro $x = 0$. Quantitas radicalis fieri videtur $\frac{1}{2}e$ vt duo valores ſint $y = (\frac{1}{2}e \pm \frac{1}{2}e) : 0$ quorum ſuperior manifeſto eſt infinitus; inferior fit $(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e) : 0$ numeratore et denom. euaneſcente. Cuius vera quantitas vt inueniatur, reſoluamus quantitatem radicalem in $\frac{1}{2}e + fx : e + (eec - ff) . x^2 : eee$ cet. Quae ergo adhibita cum ſigno inferiore dat $y = (-fx : e - (eec - ff)\, x^2 : e^3) : x$ ſeu, $y = -f : e - (eec - ff)\, x : e^3$ cet. Ergo ad $x = 0$ eſt $y = -f : e$. Idem reperturi eramus ex regula IO. BERN. ***) pro inueniendo

*) T. IIII. n. CL. Prop. 7.

**) Op. T. I. n. XXII. ſeq. WOLF El. Mech. §. 371. ed. II.

***) Analyſe des inf. pet. art. 163. A. Erud. Aug. 1704.

niendo valore fractionis cuius numerator et denominator certo caſu euaneſcunt. Nam regula ipſa facile exinde deducitur quod, ſi $x = A$ abire faciat talem quantitatem in $o : o$, poſito $A + dx$ in locum ipſius x, termini omnes finiti ſe deſtructuri ſint, ſolique infiniteſimales reliqui futuri, in quibus dx omnibus commune eliditur. Ceterum hoc exemplum adducitur a Dom. NICOLE *) in ſcripto *de curuis ſecundi generis* eundemque valorem $y = -f : e$ reperit ſed in hypotheſi $c = ff : ee$ cum tamen locum habeat in genere. Nam ſi etiam cum eo, ipſius y valor pro $x = o$ reducatur ad $y = e : 2.o - \surd(ee : 4.o.o + f : o + c)$ hoc eſt ob $1 : o = \infty$, ad $y = \frac{1}{2} e . \infty - \surd(\frac{1}{4} ee . \infty\infty + f . \infty + c)$ valor quantitatis radicalis reperitur $\frac{1}{2} e . \infty + f : e$ vt adeo rurſus prodeat $y = -f : e$. Pro reſolutione radicalium in ſeries commode inſtituenda, facient methodi a COLSONO traditae in *Commentario* quem *Methodo Fluxionum* NEWTONI anglice editae ſubiunxit. **)

VII. VENIO NVNC ad alios caſus quibus minus recte quantitates euaneſcentes negliguntur. Hi ſunt, quando, quae quantitates regulariter prae aliis euaneſcunt, certis poſitis conditionibus illis homogeneae, aut forte incomparabiliter maiores exſiſtunt. Ipſius xx fluxio eſt $(x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + dx^2$. Terminus vltimus prae primo ſemper euaneſcit, ſi x eſt quantitas finita, erit vero illi homogeneus ſi x ſit elementum gradus primi manente dx eiusdem gradus, infinitiesque maior ſi x ſit elem. gradus ſecundi aut abſolute $= o$. Hoc vero contingit in origine ipſarum x vbi primum x eſt $= o$ et proxime ſubſequens $= o + dx$, adeoque fluxio ipſius xx ſit dx^2 non $2x dx$. Haec vberius illuſtrat, vſumque illorum oſtendit IAC. BERNOVLLI ***) ego ſequens exemplum huc refero:

VIII. 1. SIT AM (v. fig. art. 1.) curua quaeuis, cuius axis CA, abſciſſa $CP = x$ ordinata rectangula $PM = z$ radius vector $CM = y$ vt ſit $yy = xx + zz$. Quaeratur ſinus CmM anguli curuae cum radio vectore. Sit $Mm = ds$, arculus centro C radio CM deſcriptus Mr, adeoque $mr = dy$, eſt poſito ſinu toto $= 1$, ſin. $CmM = Mr : Mm$. Iam $ds = \surd(dx^2 + dz^2)$ et $dz = (ydy - xdx) : \surd(yy - xx)$ vnde $ds = \surd(yy(dx^2 + dy^2) - 2xy\, dy dx) : \surd(yy - xx)$. Praeterea $Mr = \surd(ds^2 - dy^2) = \surd(y^2 dx^2 + x^2 dy^2 - 2xy dx dy)$

*) Memoires de l' Ac. des Sciences 1729. p. 297. Ed. de Holl.

**) pag. 170. Th. V. et 178. ſqq.

***) Op. T. II. n. CIII. art. 22.

$2xy\,dx\,dy) : \sqrt{(yy - xx)} = (x\,dy - y\,dx) : \sqrt{(yy - xx)}$ Vnde ſin. $CmM = (x\,dy - y\,dx) : \sqrt{(y^2 . (dx^2 + dy^2) - 2xy\,dx\,dy)}$.

2. PONATVR iam ad A punctum, curuae elementum AE continere cum axe angulum CAE ſinus $b : a$ quaeratur vero quid det expreſſio generalis ſinus CmM ad hunc locum translata. Sit Ef arculus centri C radii CE ſed Ee perpendiculum ex E in CA, quae duo in CA intercipiant rectam $ef = w$ erit vero $fEe = \frac{1}{2} ECf$, vt ſemper euaneſcat w prae Ee, Ef rectis. Iam vero ſumta Ee pro ſinu toto communi, eſt $ef : eA =$ tang. eEf : tang. eEA. Quodſi ergo eſt eEA finitae magnitudinis, hoc eſt, EAe a recto finita quantitate differt, euaneſcet ef prae eA. Contra ſi EAe propemodum rectus eſt vt eius complem. eEA ſit infinite exiguum, poteſt $ef : eA$ eſſe ratio quaelibet finita, fietque ratio aequalitatis ſi $EAC = R - \frac{1}{2} ECA$, et maioris ad minus ſi EAC adhuc minori quantitate a recto differt. Iam Ce eſt x reſpondens ipſi $CE = y$ et CA x proximum reſpondens proximo $y =$ itidem CA. Ergo $Af = dy$ et $Ae = dx = dy + w$.

3. ERIT VERO ſin. $EAC = Ee : EA$ vel $Ef : EA$ nam haec duo per oſtenſa non differunt. Sed $Ee^2 = yy - xx = (a - dy)^2 - (a - dy - w)^2 = 2(a - dy)\,w - ww$ cui ſi addatur $Ae^2 = dy^2 + 2w\,dy + ww$ fit $AE = \sqrt{(2aw + dy^2)}$ Quaecunque vero ratio intercedat inter dy et w patet $w\,dy$ et ww ſemper euaneſcere prae aw vt hinc fiat $Ee : EA$ vel ſin. $EAC = \sqrt{2aw} : \sqrt{(2aw + dy^2)}$ Quo poſito $= b : a$ fit $w = bb\,dy^2 : 2a . (a^2 - b^2)$ adeoque vt decet euaneſcens prae dy ſi $b < a$ ſed ſi $b = a - g$ fit $w = (a - g)^2 dy^2 : 2a . (2ag - g^2) = dy^2 : 4g$ ſi g ſit euaneſcens. Ergo w eſt elementaris eiusdem gradus cum dy, ſi g ſit elementum eiusdem gradus cum dy ſeu EAC elementariter a recto differat. Hoc ergo caſu dy^2 euaneſcet prae $2aw$ fietque ſin. $EAC = \sqrt{2aw} : \sqrt{2aw} = 1$. Scilicet, ef, tangens anguli elementaris primi gradus eEf ad radium elementarem primi gradus Ee, ſemper eſt elementum ſecundi gradus. Accedente vero eAE proxime ad rectum fit eA euaneſcens prae eE adeoque elem. ſecundi gradus homogeneum ipſi w. Proinde etiam dy et w ſeu fA et ef fiunt homogenea, cum antea, ſi ef eſt infiniteſima gradus ſecundi et fA, Ae, homogeneae ſunt, ef euaneſcat prae eA. Imo fieri poteſt vt fA prae ef ſeu dy prae w euaneſcat.

4. FORMVLA

4. FORMVLA generalis ſin. CmM n. 1. huius art. ſic ad A punctum transferetur: Eſt in praeſenti $x = a - dy - w$ et $dx = dy + w$ et $y = a - dy$ (n. 2.) hinc $y - w = x$. Er. $ydx - xdy = y.(dy + w) - (y - w)dy = wy + wdy = aw$ ſcribendo $a - dy$ pro y et omittendo euaneſcentes prae aw. Quadratum denominatoris ſinus ſeu $y.(ydx^2 + ydy^2 - 2xdxdy)$ ſepoſito tantiſper factore primo, dat factorem alterum $y.(dy + w)^2 + ydy^2 - 2.(y - w).(dy + w)dy = 2ydy^2 + 2ywdy + yww - 2ydy^2 - 2ywdy + 2wdy^2 + 2wwdy = wwy + 2wdy^2 + 2wwdy$. Quod, ſi w euaneſcat prae dy abit in $w.(wy + 2dy^2)$ euaneſcente $wwdy$ prae reliquis, ſed ſi w non euaneſcat prae dy euaneſcent duo vltimi termini prae primo et eſt wwy. Totius ergo denominatoris quadratum, poſito $a - dy$ pro y, fit in caſu w euaneſcentis ſeu anguli EAC acuti $= (a - dy).w.(w.(a - dy) + 2dy^2) = aw.(aw + 2dy^2)$ et in caſu w non euaneſcentis ſeu EAe recti $(a - dy).ww.(a - dy) = aaww$. Vt fiat ſin. CmM ad A punctum translatus in caſu primo $aw : \sqrt{aw}.\sqrt{(aw + 2dy^2)} = \sqrt{aw} : \sqrt{(aw + 2dy^2)}$ et in caſu ſecundo $aw : aw = 1$.

5. AST caſu primo vt oſtenſum eſt n. 3. ſinus alius plane prodire debebat, oportet ergo vt hic falſus ſit. Principium vero erroris in eo ſitum eſt, quod proditurum ſit $(ydy - xdx) : \sqrt{(yy - xx)}$ huic caſui applicatum $= (ydy - (y - w)(dy + w)) : \sqrt{(yy - yy + 2wy - ww)} = -wy : \sqrt{2wy} = -aw : \sqrt{2aw} = \sqrt{\tfrac{1}{2}aw}$. Quo valore ipſius dz ſubſtituto ex $ds = \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$ et $Mr = \sqrt{(ds^2 - dy^2)}$ obtinebitur idem valor ſinus qui n. praec. Hic autem ipſius dz valor falſus eſt. Ponit enim in capienda fluxione ipſius zz euaneſcere dz^2 prae $2zdz$, cum hic contrarium accidat propter z naſcens. Nam cum primum z reſpondeat ipſis $x = CA$, $y = CA$, eſt illud $= 0$, et deinde eſt $(z + dz)^2 = CE^2 - Ce^2 = 2aw$ vt ſit $dz = \sqrt{2aw}$ quia $2zdz = 0.dz$ euaneſcit prae dz^2. Hinc $ds^2 = dx^2 + dz^2 = (dy + w)^2 + 2aw = 2aw + dy^2$ ſi w euaneſcat prae dy, Vnde $Ef : ds$ ſeu ſin. $AEC = \sqrt{2aw} : \sqrt{(2aw + dy^2)}$ vt ante n. 3.

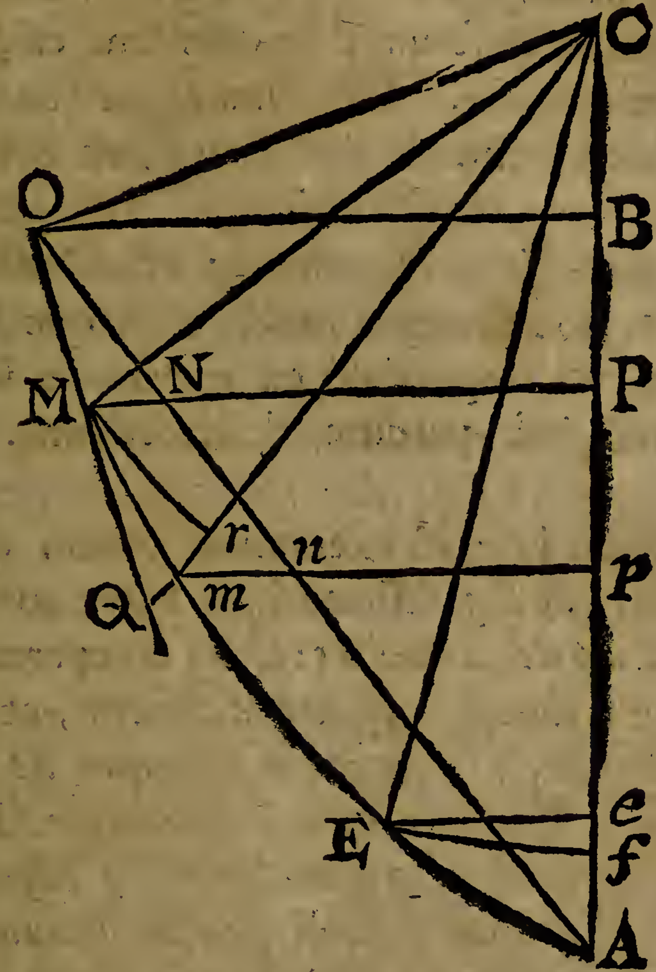
6. PATET ergo, fieri non poſſe, vt formula generalis ſin. CmM transferatur ad A punctum niſi lege differentiandi mutata. Quod cum generatim hanc formulam pro quouis tali angulo adhibendo fieri nequeat, non licebit ſumere eam omnibus angulis communem

niſi forte dentur caſus, quibus falſus ſin. *CmM* ad *A* tranſlati valor n. 4. cum vero conſpiret. Id vero contingere in caſu ſecundo anguli *EAC* recti patet ex n. 3. 4. 5. quia tum vterque valor n. 3. et n. 4. abit in 1. Quo ergo formula generalis omnibus curuae punctis communis ſit, oportet vt ad *A* ſit angulus rectus. Idque ipſum niſi fallor ſubindicatur, cum aequando vtrosque valores n. 2. et 4. ex $\sqrt{2aw} : \sqrt{(2aw + dy^2)} = \sqrt{aw} : \sqrt{(aw + 2dy^2)}$ obtinetur $2dy^2 = dy^2$, id enim ſi abſurdum eſſe non debeat oſtendit eſſe dy^2 euaneſcens, vt ſit in caſu anguli recti. Simile exemplum habetur in parallelogrammo *Newtoniano* vbi aequatio $2m = m$ vel ſimiles indicant $m = o$. *) Ex dictis vero ratio patet, cur in definiendis in mechanica traiectoriis algebraicis pro axe ſumenda ſit recta curuae perpendicularis **)

VIIII. KEILIVS ***) probaturus penduli vnius eiusdemque vibrationes exiguas omnes eſſe aequidiuturnas, ita ratiocinatur: *Quoniam arcus exigui nec longitudine nec decliuitate multum a ſubtenſis ſuis deflectunt, graue paria fere inſumet tempora, ſiue per arcus, ſiue per arcuum ſubtenſas feratur, ſed tempora deſcenſuum per arcuum ſubtenſas aequalia ſunt, quare tempora per arcus erunt fere aequalia.* Quae tempora quam recte KEILIO confundantur is facile iudicabit, qui in memoriam ſibi reuocat, tempus deſcenſus per arcum inf. paruum, eſſe ad tempus deſcenſus per chordam, vt eſt diameter ad quartam peripheriae partem. ****) Imo ipſe KEILIVS, vbi oſtendit identitatem oſcillationum ſuper cycloide et arcu inf. paruo circuli oſculatoris *****), hinc denuo rationem iſochroniſmi oſcillationum infinite paruarum reddit, quaſi poſſit prior ſua quam vocat demonſtratio, non vitioſa eſſe, ſi noua haec recte ſe habeat, aliudque eſt tempus deſcenſus per cycloidem, quam per chordam circuli oſculatoris. Ipſe hoc exemplum inter ea refert in quibus hypotheſis: elementa curuarum eſſe rectilinea, in errorem nos inducere poſſit COLIN MAC LAVRIN ******), ſed cur hic applicari nequeat diſtincte non oſtendit. Quod vt nobis pateſiat, animad-

*) COLS. Method. of Flux. pag. 203.
**) EVL. Mech. T. I. art. 640.
***) Introd. ad Phyſ. ver. Th. 41. p. 163. ed. s' Graueſ.
****) EVL. Mech. T. II. art. 175.
*****) Th. 46.
******) Treat. of Flux. art. 498.

animaduertamus, ad deſcenſum, etiam ſuper arcu infinite paruo, ad leges mechanicas exigendum, concipi eum debere tamquam motum vniformiter acceleratum poſita vi conſtante $= g$.



Igitur ſi mobile decidat per arcum OMA altitudinis $AB = b$ et ſit $AP = x$, velocitasque in M debita altitudini $g.(b-x)$ motus per inſtans proximum quo abſoluitur Mm concipi debet vniformis et hinc incrementum velocitatis caſu per altitud. Pp adquiſitum, euaneſcere debet prae velocitate deſcenſu per $b-x$ adquiſita, et adeo etiam Pp prae $b-x$. Vnde ſi b et x ſint elementares gradus primi, erit Pp elementum gradus ſecundi. Concipi ergo debent tam axis AB quam arcus AMO in infinitas portiones reſpectu ipſorum elementares diuiſae, ordinatis PM, pm, quae ſimul abſcindent portiones elementares Nn, chordae AO, ſique tempuſculum per Nn diuerſum fuerit a tempuſculo per Mm vtique ſummae temporum quibus fiunt deſcenſus totales per ONA, OMA, differre poterunt. Iam ſi OMA ſit arcus circuli ſagittae $BA = b$ inf. paruae et radii $CA = a$ eſt pro circulo in genere $Mm = ds = a\,dx : \surd(2ax - xx)$ et hic ob x euaneſcens $Mm = a\,dx : \surd 2ax$ vel $Mm = dx.\surd a : \surd 2x$. At ex nat. circ.

 ſemper

ſemper eſt $ONA = \sqrt{2ab}$ etſi b ſit finitae magnitudinis. Vnde $AN = x\sqrt{(2a:b)}$ et $Nn = dx.\sqrt{(2a:b)}$. Ergo $Mm:Nn = \sqrt{b}: 2\sqrt{x}$ vt adeoque $Mm > Nn$ quamdiu $4x < b$ et non niſi ad $x = \frac{1}{4}b$ vtrumque elem. ſit aequale. Porro $Mm:Nn =$ ſin. nNP: ſin. mMP ergo ſi elementa differunt, vt oſtenſum eſt, etiam inclinationes illorum erunt diuerſae. Elementa igitur arculi circularis cum elementis chordae longitudine et decliuitate non conueniunt, et licet totus arculus cum tota chorda coincidat, hoc ad motus vniformiter in vtroque acceleritati idemtitatem oſtendendam nihil efficit. Ceterum id adhuc in hoc exemplo notabile eſt, quod ob angulum ad A recto proximum, vis tangentialis ex g oriunda ſit infinite parua, quo fit vt ad arcum inf. paruum deſcribendum, finito tempore opus ſit.

X. NON vnicum hoc eſt exemplum eorum quae ex motuum ſcientia huc ſpectant. Vulgatiſſimae illae leges corporum a viribus ſollicitatorum $dc = npdt$, $dt = ds:c$, ita comparatae ſunt, vt prima quidem valeat, etſi motus a quiete inchoetur, et dc non genitae velocitatis incrementum, a potentia p tempore dt productum, ſed illam ipſam naſcentem ſignificet, quia potentiarum abſolutarum idem eſt effectus in mota corpora ac in quieſcentia. *) Altera vero lex, dum motum velocitate c initio tempuſculi genita, durante hoc tempore vniformiter continuatum ponit, vtique non poteſt applicari principio motus vbi $c = o$ nec adeo formula $cdc = npds$ ex prioribus coniunctis oriunda vel $dv = pds$ ſi $cc = v$ et $n = \frac{1}{2}$. **) Quare his aequationibus non ſubiacet motus a quiete inchoati initium. Cum tamen, quae tria in motu definiendo inueſtigantur, velocitas, tempus, ſpacium, ea iam conſtet tunc euaneſcere, ſatis eſt formulis locum concedi, vbi haec aliquam iam obtinent magnitudinem; Niſi forte talia ponantur, tunc cum incipere motus ex quiete debet, quae nunquam permittant motum exſiſtere, ad quem applicari queant aequationes. Is caſus eſt potentiae in initio motus nullae, cuius exemplum exſtat apud EVLERVM. ***) Contra ſi potentia ab initio non ſit nulla, cum durante tempore inf. paruo conſtans maneat, vtcunque ceterum varietur, in ipſo primo tempuſculo concipiendus eſt motus

*) EVL. Mech. L. I. art. 131.
**) ib. 207.
***) ib. 316. ſequ.

motus vniformiter acceleratus, etſi reliquo tempore aliam plane legem ſequatur, quod et a mechanicis ſcriptoribus dudum obſeruatum eſt. *) Ex multis aliis quibus mechanica quae dixi illuſtrat, quaedam ſaltim indicabo. Incrementum aliquod velocitatis, ſummis mathematicis neglectum, effecit, vt generaliſſime brachyſtochronas inueniendi gloriam, magno EVLERO reliquerint. **) Celeritas a corpore nullis potentiis ſollicitato deperdita, dum praeſcriptae viae flexum ſequi continuo tenetur, infinite paruum ſecundi gradus eſt, motus vniformitatem non perturbans, preſſionem tamen generare videtur, qua corpus canalem quo continetur vrget, ***) qui, ſi ſuſtinere illam nequeat, motus producuntur ab EVLERO in *opuſculis* nuper editis ****) examinati. Aquae in anguſtiorem tubum ex ampliore fluentis gurgitem, primus vidit, qui cum primis infinite parua vidit IO. BERNOVLLI, vimque vt generetur impendendam computauit, oſtenditque, his exiguis neglectis, motum fluidorum ſciri non poſſe. *****)

XI. INSIGNE haberetur exemplum, quanti interſit magnitudinum euaneſcentium rationem habere, etiam dum cum negligi poſſe quam maxime videntur, ſi veritas ſua conſtaret iis quae habet FONTENELLIVS de curuatura infinita. ******) Concipit ſibi eo in loco vbi radius oſculi euaneſcit, curuaturaque infinita exſiſtere vulgo dicitur, latus infinite exiguum ordinis ſecundi, immediate iunctum alii infinite exiguo ordinis primi. Quo ipſo effici exiſtimat, ſi recte verba eius interpretor, vt curua directionem ſuam infinito citius quam in alio quocunque loco immutet. Eam notionem fateor ſcriptorem non omnino dedecere qui mathematicam profunditatem poetico ingenio exornat, vereor tamen, ne moroſior paulo geometra probet ſententiam, quam B. HAVSENIVS ei loco in exemplari ſuo ad marginem adſcripſit: *Je n' entens point cela.* Mihi videtur ita res explicari poſſe: Sint OM, Mm, duo elementa proxima cuiusuis curuae, infinite parua gradus I. Per puncta O, M, m, tranſeat circulus

*) NEWT. Pr. L. I. S. I. Lemm. X.
**) Mech. L. II. 366.
***) ib. art. 30.
****) n. I.
*****) Hydraul. Op. T. IIII. Comment. Ac. Imp. Petrop. T. VIIII.
******) Geom. des inf. pet. art. 910. ſqq.

culus curuedinem menſurans radii r, et in OM productam demiſſa ſit perpendicularis mQ. Ex dictis art. 1. ſcripti huius patet eſſe ſemiſummam angulorum ad centrum circuli oſculatoris, elementis OM, Mm, reſpondentium aequalem mMQ angulo ſeu $(OM+Mm):2r = mQ:Mm$, ſtatuatur $OM=Mm=ds$ eſt $r=ds^2:mQ$. Vt igitur ipſius r valor prodeat nihilo aequalis, debet ds^2 euaneſcere prae mQ. Iam in curuatura ordinaria vbi eſt mQ elementum ſecundi gradus, fractionis qua r exprimitur numerator et denominator homogenei ſunt, efficiuntque r finitum, vnde pro r infinite paruo, nihil aliud requiritur, quam vt mQ ſit ordinis alicuius infiniteſimi inter 1 et 2 intermedii puta $1:\infty^{3:2}$ tunc enim ob $ds^2 = 1:\infty^2$ quotiens erit infinite exiguus, puta in exemplo quod dedi $=1:\infty^{1:2}$ eritque re vera curuedo eo in loco infinities maior quam vbiuis alibi, licet propterea non fiat angulus curuaturae finitae magnitudinis. Pro parabola $y^3=ax^2$ eſt $r=(4a+9y).\sqrt{}(4ay+yy):6a$ *) quod pro caſu $y=1:\infty$ fit $4\sqrt{a}:3\sqrt{\infty}$ infinite paruum ordinis $\frac{1}{2}$. Vnde cum ds ſit ordinis infiniteſimi primi, erit mQ ordinis $2-\frac{1}{2}=3:2$. Id quod ipſe reperit in hoc exemplo FONTENELLIVS **). Ceterum curuaturam infinitam ita explicat COLIN MAC LAVRIN in libro ſupra a me citato: ***) Definit circulum tangentem communem cum curua habentem, qui ita comparatus ſit, vt inter eum et curuam, per punctum contactus commune, alius circulus transire non poſſit. Hoc circulo curuedinem metitur, oſtenditque, dato quouis circulo cum curua tangentem communem habente, aliis in caſibus ſemper dari maiorem circulum qui inter primum curuamque tranſeat, aliis dari perpetuo eiusmodi circulos minores atque minores, quo efficitur curuatura, dati cuiusuis circuli curuedine, illic minor, hic maior, hoc eſt nulla, vel infinita. Quae cum ideis quas ante dedi conferre, inſtituti mei ratio, limitesque quos tractationi huic ſtatui non patiuntur. Neque enim finem ſcribendi reperirem, ſi omnia quae huc trahi poterant exempla adducere vellem, cum non ſolum in ipſo infinitorum calculo innumera ſuperſint, ſed et aliquo modo huc ſpectent nonnulla ex illo calculi genere, quod quantitatibus proxime ad veras accedentibus

*) NEWT. Meth. of Flux. Prob. V. art. 65.

**) Elemens de la geom. de l' inf. art. 1143. et ſviv.

***) art. 377. 378.

tibus verarum loco vtitur. Nam et hic ſollicite cauendum eſſe exiſtimo, ne, ſi quantitates exiguae approximationibus quas vocant inueſtigentur, tales negligamus, quae, vtcunque exiguae ſint, tamen ad eas quas quaerimus relatae, vel plures in cumulum congeſtae, non contemnendae exſiſtunt magnitudinis. Sic, vt hoc vtar, ROBERT SMITH in theoria aberrationis lentium condenda, ſumit, ſi foci radiorum incidentium parum diuerſi ſint, et refractorum focos ſibi fore proximos. *) Oſtendi niſi fallor decebat, non ſolum differentiam hanc eſſe exiguam, ſed tam eſſe exiguam, vt prae ipſa aberratione quae quaeritur, negligi queat. Fieri omnino etiam poteſt, vt omittendo quae omitti non debent, verum tamen obtineatur, vel, ſi fortuito falſus valor cum vero conſentiat, vt art. VIIII. vel errores oppoſiti ſe mutuo deſtruant. ROBINSIVS maſſam omnem pulueris pyrii quo tormentum oneratum eſt, vnico momento accendi ponens, in vi qua globus proiicitur computanda, negligit id quod erumpendo per lumen accenſorium, vel eam animae partem quam globus non occupat, perditur. Huius autem ratione habita, poſitoque puluerem ſucceſſiue ignem concipere, priori quidem ex cauſſa minuitur vis a ROBINSIO reperta, ex altera autem, accenſis continuo aliis aliisque maſſae partibus rurſus augetur, vt peccatum peccato emendans ROBINSIVS accedere propius ad verum potuerit. **) Neque tamen hoc modo recte quis calculum ſubductum eſſe adſeruerit, ſi vel bis errando verum obtineatur, vel demonſtrationes dentur, vt TSCHIRNHAVSEN CAVALLERIO obiicit ***) per accidens verae.

Mihi vero id potiſſimum propoſitum fuit, pauca ſpecimina ſeligere, quibus et fontes errorum ex contemptis quantitatibus infinite paruis oriundorum detegerentur, et methodus illos euitandi illuſtraretur. Quo labore ſi ita defunctus ſum, vt magnis in illa arte ad quam ſcriptio haec ſpectat viris, induſtria ſaltim mea non omnino diſpliceat, ii vero, qui ad intimius cognoſcendam, certiſſimam ſcientiarum adſpirant, vtilia quaedam hic reperiant monita, non ea quidem cognitu et inueſtigatu difficillima, ſed tamen, eruditis etiam geometris non ſatis ſemper obſeruata, non inconueniens omnino credo hoc opuſculum ei occaſioni cui deſtinatur.

*) Compleat Syſtem of Optiks art. 651.
**) Eulers erläuterte Artillerie 4. Anmerk. zum VII. §. des I. Cap. 147. S.
***) Med. Ment. Sect. III. p. 172. ed. II.

CVM enim SERENISSIMVS POTENTISSIMVSQVE PRINCEPS AC DOMINVS, FRIDERICVS AVGVSTVS, *Rex Poloniarum, Magnus Dux Lithuaniae, Ruſſiae, Pruſſiae, Mazouiae, Samogitiae, Kyouiae, Volhiniae, Podoliae, Podlachiae, Liuoniae, Smolenskiae, Seueriae, Zſchernicouiae, Dux Saxoniae, Iuliae, Cliuiae, Montium, Angriae et Weſtphaliae, Sacri Romani Imperii Archimareſchallus et Elector, Landgrauius Thuringiae, Marggrauius Miſniae et ſuperioris atque inferioris Luſatiae, Burggrauius Magdeburgi, Comes Princeps Hennebergiae, Comes Marcae, Rauensberg, Barbiae, Hanouiae, Dominus Rauenſteinii, reliqua, Dominus meus longe clementiſſimus* in hac academia matheſin publice extra ordinem docendam mihi imperauerit, REGIAM CLEMENTIAM deuenerabor munusque capeſſam futura die Mercurii VIIII. Cal. Dec. hora VIIII. mat. *de cauſſis cur inter mathematicos rari vel nulli ſint diſſenſus* breuiter dicturus. Cui Solemnitati, vt RECTOR ACADEMIAE MAGNIFICVS, COMITES ILLVSTRISSIMI, *Grauiſſimi Proceres, nec non Generoſiſſimi Nobiliſſimique Academiae ciues*, adeſſe beneuolasque aures mihi largiri dignentur, ſubmiſſe decenterque rogo. P. P. in Academia Lipſienſi Domin. XXIIII. poſt Feſtum S. S. Trin. A. R. S. CIƆIƆCCXXXXVI.